



TITLE:

# 平面領域上の interpolating sequence について(函数環に関連 した諸問題(II))

AUTHOR(S):

成田, 淳一郎

---

CITATION:

成田, 淳一郎. 平面領域上の interpolating sequence について(函数環に関連した諸問題(II)). 数理解析研究所講究録 1988, 654: 48-58

ISSUE DATE:

1988-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100502>

RIGHT:

# 平面領域上の *interpolating sequence* について

福井高専 成田淳一郎 (Junichiro Narita)

## 1. 目標

Carleson [3] による単位円板の場合の *interpolating sequence* の特徴付けを, もう少し一般の領域に拡張することを試みる. その際 *interpolating constant* についても考察する.

## 2. 準備

$D$  を平面領域 (又は開集合),  $H^\infty(D)$  を  $D$  上の有界正則関数のなる Banach 環,  $\mathcal{M}(D)$  をその極大 ideal 空間とする.

$D$  上の点列  $\{z_n\}$  が *interpolating sequence* (for  $H^\infty(D)$ ) とは,

$$\forall \{a_n\} \in \ell^\infty, \exists f \in H^\infty(D) \text{ s.t. } f(z_n) = a_n \quad (\forall n)$$

をみたすときとする. このとき開写像定理により

$$M = \sup_{\| \{a_n\} \|_\infty \leq 1} \inf \{ \|f\|_\infty ; f \in H^\infty(D), f(z_n) = a_n \quad (\forall n) \} < \infty$$

となり, この  $M$  を  $\{z_n\}$  の *interpolating constant* と呼ぶ.

$D = \{ |z| < 1 \}$  のときには ([3]),

$$\{z_n\} : \text{interpolating seq.} \iff \delta = \inf_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left| \frac{z_n - z_m}{1 - \bar{z}_m z_n} \right| > 0$$

そしてこの  $\delta$  と  $\{z_n\}$  の interpolating constant  $M$  との間に関係が成り立つ ([6]).

$$\frac{1}{\delta} \leq M \leq \frac{C}{\delta} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right) \quad (C \text{ は絶対定数}).$$

Interpolating sequence の局所性については Behrens [2] で指摘されているが、ここではもう少し一般性のあつた形で示す

定理 1  $D$  内の点列  $S = \{z_n\}$  に対し、

$\forall x \in \bar{D}, \exists U: x$  の近傍 s.t.  $S \cap U$  は  $H^\infty(D \cap U)$ -interpolating sequence  $\Rightarrow S$  は  $H^\infty(D)$ -interpolating sequence.

### 3. $H^\infty(\{D_n\})$ -interpolating sequence とその局所性

Interpolating constant に関する結果を出すために次のような Banach 環を考える.  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  を平面開集合の列とし、その disjoint union  $\bigcup_{n=1}^\infty (D_n \times \{n\})$  上の有界関数で各  $D_n \times \{n\}$  ( $D_n$  と同一視する) 上正則なもの全体を  $H^\infty(\{D_n\})$ 、その極大 ideal 空間を  $\mathcal{M}(\{D_n\})$  とする. 以下  $D_n \subset \{ |z| < R \}$  ( $\forall n$ ) とし、 $Z \in H^\infty(\{D_n\})$  s.t.  $Z(z, n) = z$  の Gelfand 変換を  $\hat{Z}$  とする.  $\bigcup_{n=1}^\infty (D_n \times \{n\})$  内の点列に対しても同様に interpolating seq. を定義すると、 $\hat{Z}$  に関して次の局所性が成り立つ.

定理 1'  $S = \{z_j\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \times \{n\})$  内の点列としたとき,  
 $\forall x \in \mathbb{C}, \exists U: x$  の近傍 s.t.  $S \cap \hat{Z}^{-1}(U)$  は  $H^{\infty}(\{D_n \cap U\})$ -  
 interpolating seq.  $\Rightarrow S$  は  $H^{\infty}(\{D_n\})$ -interpolating seq.

定理 1' (1 も同様) の証明のために次の 2 つの結果を用いる.  
 便宜のため定理 3 のみ証明を書いておく.

定理 2 ([8])  $\{D_n\}$  を上記の通り,  $U$  を平面開集合とする.  
 restriction map  $H^{\infty}(\{D_n\}) \rightarrow H^{\infty}(\{D_n \cap U\})$  により引き起  
 こされる projection  $\Phi: \mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \rightarrow \mathcal{M}(\{D_n\})$ ,  
 即ち  $\varphi \in \mathcal{M}(\{D_n \cap U\}), f \in H^{\infty}(\{D_n\})$  に対し

$$(\Phi(\varphi))(f) = \varphi(f|_{D_n \cap U})$$

とすると  $\Phi|_{\mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)}$  は  $\mathcal{M}(\{D_n\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$  の上  
 への同相写像である.

定理 3 ([1])  $A$  を  $\ell^{\infty}$  の linear subalgebra で  $\ell^{\infty}$  の巾等  
 元をすべて含むとする. このとき  $A$  があるノルム (これを  
 $\|\cdot\|$  で表す) に関して Banach 環 (完備でなくともよい)  
 になっ ていけば,  $\sup \{\|x\| : x \in A, x^2 = x\} < \infty$   
 である.

[証明] 背理法で示す. まずもし  $\sup \{ \|x\| : x \in A, x^2 = x \} = \infty$  ならば,  $\exists x_n \in A \ (n=1,2,\dots)$  s.t.  $x_n^2 = x_n$ ,  $x_n x_m = 0 \ (n \neq m)$ ,  $\|x_n\| \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$  を言う.  $\mathcal{L}^{\infty}$  の中等元  $\in \mathcal{N}$  の部分集合  $X$  の定義関数  $1_X$  の形で表し, 次の2つの場合に別けて考える.

(1)  $\exists X \subset \mathcal{N}$  s.t.  $\sup \{ \|1_Y\| : Y \subseteq X \} = \infty$  のとき (このとき  $X$  は性質  $(\alpha)$  を持つと言うことにする).

まず  $\|1_{Y_n}\| \geq n + \|1_{Y_{n-1}}\| \ (n=2,3,\dots)$  をみたす  $\mathcal{N}$  の部分集合の単調減少列  $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$  を作る.  $Y_1 = X$  とし,  $Z_1 \subset Y_1$  を  $\|1_{Z_1}\| \geq 2 + 2\|1_{Y_1}\|$  をみたすようにとると,

$$\|1_{Y_1 \setminus Z_1}\| = \|1_{Y_1} - 1_{Z_1}\| \geq \|1_{Z_1}\| - \|1_{Y_1}\| \geq 2 + \|1_{Y_1}\|.$$

そしてやはり三角不等式から,  $Z_1$  または  $Y_1 \setminus Z_1$  のどちらかは性質  $(\alpha)$  を持つので, どちらを  $Y_2$  とする. 以下同様に (性質  $(\alpha)$  を持つ)  $Y_{n-1}$  から  $Z_{n-1} \subset Y_{n-1}$  を  $\|1_{Z_{n-1}}\| \geq n + 2\|1_{Y_{n-1}}\|$  をみたすようにとり,  $Z_{n-1}$ ,  $Y_{n-1} \setminus Z_{n-1}$  のうち性質  $(\alpha)$  を持つ方を  $Y_n$  とすればよい. よして  $X_n = Y_n \setminus Y_{n+1}$  とおくと  $\{X_n\}$  は互いに disjoint で  $\|1_{X_n}\| \geq \|1_{Y_{n+1}}\| - \|1_{Y_n}\| \geq n+1$ . 即ち  $x_n = 1_{X_n} \ (n=1,2,\dots)$  が求める列になら, ている.

(2)  $\forall X \subset \mathcal{N}, \sup \{ \|1_Y\| : Y \subset X \} < \infty$  のとき.

任意に  $X_1 \subseteq \mathcal{N}$  をとり,  $M_1 = \sup \{ \|1_Y\| : Y \subseteq X_1 \}$  とおく. 背理法の仮定により  $\|1_{Z_1}\| \geq 2 + M_1$  をみたす  $Z_1 \subseteq \mathcal{N}$  が存在する.  $X_2 = Z_1 \setminus X_1$  とおくと  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ,

$$\|1_{X_2}\| \geq \|1_{Z_1}\| - \|1_{Z_1 \cap X_1}\| \geq 2 + M_1 - M_1 = 2.$$

以下同様に  $M_2 = \sup \{\|1_Y\| : Y \subseteq X_1 \cup X_2\}$ ,  $\|1_{Z_2}\| \geq 3 + M_2$ ,  
 $X_3 = Z_2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ , ... とし,  $\{X_n\}$  は互いに  
 disjoint で  $\|1_{X_n}\| \geq n$  ( $n=2,3,\dots$ ). よって  $\chi_n = 1_{X_n}$  ( $n=1,2,\dots$ )  
 が求める列にならている.

さて, この  $\{\chi_n\}$  の異なる元を使って  $\{y_{j,k}\}_{j,k=1}^\infty$  を  
 $\|y_{j,k}\| > 2^{j+k}$  をみたすようにとり,  $y_j = \sum_k y_{j,k}$  とおく.  
 $\chi_n \chi_m = 0$  ( $n \neq m$ ) であるから  $y_j$  も  $\ell^\infty$  の中等元, よって  $A$  の  
 元である. 各  $j$  に対し  $k_j$  を  $2^{k_j} > \|y_j\|$  とするようにとり,  
 $y = \sum_j y_{j,k_j}$  とすると  $y y_j = y_{j,k_j}$  であり,  
 $2^{j+k_j} < \|y_{j,k_j}\| \leq \|y\| \|y_j\| \leq \|y\| 2^{k_j}$   
 $\therefore \|y\| > 2^j \quad (\forall j)$

となら, 矛盾を生じる

[証明終]

[定理 1' の証明] 段階に分けて証明する.  $\text{hull}(I)$  と  $\text{interpolating seq.}$  の関係については [7] の最後の定理によつて.

(1) まず  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{S_1} \cap \overline{S_2} = \emptyset$  ( $\mathcal{M}(\{D_m\})$   
 の閉包) を示す.  $x \in \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$  があつたとして,  $\hat{Z}(x)$  の近  
 傍  $U$  を定理の仮定のようにとると,  $S \cap \hat{Z}^{-1}(U)$  は  $H^\infty(\{D_m \cap U\})$ -  
 interpolating seq. であるから,  $\exists f \in H^\infty(\{D_m \cap U\})$  s.t.

$$f = 0 \text{ on } S_1 \cap \hat{Z}^{-1}(U), \quad f = 1 \text{ on } S_2 \cap \hat{Z}^{-1}(U)$$

$$\therefore \hat{f} = 0 \text{ on } \overline{S_1 \cap \hat{Z}^{-1}(U)}, \quad \hat{f} = 1 \text{ on } \overline{S_2 \cap \hat{Z}^{-1}(U)}$$

であるから,  $\overline{S_1 \cap \hat{Z}^{-1}(U)} \cap \overline{S_2 \cap \hat{Z}^{-1}(U)} = \emptyset$  (in  $\mathcal{M}(\{D_m \cap U\})$ ).

よって定理 2 により  $\overline{S_1 \cap S_2 \cap \hat{Z}^{-1}(U)} = \emptyset$  (in  $\mathcal{M}(\{D_m\})$ )

がわかり  $x \in \overline{S_1 \cap S_2}$ ,  $x \in \hat{Z}^{-1}(U)$  に矛盾する.

(2)  $I \subset \mathcal{M}(\{D_m\})$  に対して  $I_I = \{f \in H^\infty(\{D_m\}) : \hat{f} = 0 \text{ on } I\}$

( $H^\infty(\{D_m\})$  の ideal),  $\text{hull}(I) = \{x \in \mathcal{M}(\{D_m\}) : x = 0 \text{ on } I_I\}$

とおくと一般に  $\text{hull}(I) \supset \overline{I}$  であるが, さうに

$$I: \text{interpolating seq.} \Rightarrow \text{hull}(I) = \overline{I}$$

であることを言う.

$I: \text{interpolating seq.}$  のとき  $H^\infty|_{\overline{I}} = C(\overline{I})$  ( $\overline{I}$  上の連続関数全体) である.  $x \in \text{hull}(\overline{I})$  に対して

$$H^\infty|_I \ni [f] \mapsto x(f) \quad (f \in H^\infty(\{D_m\}))$$

は well defined で,  $H^\infty|_{\overline{I}} = C(\overline{I})$  上の複素線形同形であるから

$x \in \mathcal{M}(C(\overline{I})) = \overline{I}$ . よって  $\text{hull}(I) \subset \overline{I}$ .

$$(3) \overline{I_1} = \text{hull}(I_1), \quad \overline{I_2} = \text{hull}(I_2) \Rightarrow \overline{I_1 \cup I_2} = \text{hull}(I_1 \cup I_2).$$

とも言えるがよいが,  $x \notin \overline{I_1 \cup I_2}$  とすると  $x \notin \text{hull}(I_i)$  ( $i=1,2$ )

ゆえ  $\exists f_1, f_2 \in H^\infty$  s.t.  $\hat{f}_i = 0$  on  $I_i$ ,  $\hat{f}_i(x) \neq 0$  ( $i=1,2$ ).

$\therefore \widehat{f_1 f_2} = 0$  on  $I_1 \cup I_2$ ,  $\widehat{f_1 f_2}(x) \neq 0$ . よって  $x \notin \text{hull}(I_1 \cup I_2)$ .

$$(4) \overline{S} = \text{hull}(S).$$

$\forall x \in \mathbb{C}$  に対し仮定のように  $U$  をとり, さらに  $x \in V \subset \overline{V} \subset U$  とする近傍  $V$  をとる. このような有限個の  $V$  で  $\overline{UD_m}$  を覆い

$V_1, \dots, V_\ell$ , 対応する  $U$  を  $U_1, \dots, U_\ell$  とする.  $S = S_1 \cup \dots \cup S_\ell$ ,  $S_i \subset \hat{Z}^{-1}(U_i)$  と disjoint に分ける と (2) により  $\bar{S}_i = \text{hull}(S_i)$  in  $\mathcal{M}(\{D_m \cap U_i\})$  ( $i=1, \dots, \ell$ ). とこが定理 2 により  $\bar{S}_i$  は  $\mathcal{M}(\{D_m\})$  で考えても変わらず,  $\text{hull}(S_i)$  が  $\hat{Z}^{-1}(U_i)$  内で変わらばいいこともわかる.  $\hat{Z}^{-1}(U_i)$  の外に關しては,  $x \in \mathcal{M}(\{D_m\})$ ,  $\hat{Z}(x) \notin U_i$  のとき開集合  $O_1, O_2$  を  $\bar{V} \subset O_1 \subset U_i$ ,  $x \in O_2$ ,  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$  とする ようにとり  $O = O_1 \cup O_2$  とする.

$f \in H^\infty(\{D_m \cap O\})$  s.t.  $f = 0$  on  $D_m \cap O_1$ ,  $f = 1$  on  $D_m \cap O_2$  ( $m=1, 2, \dots$ ) を考えると  $\hat{f} = 0$  on  $S_i$ ,  $\hat{f}(x) = 1$  ([8] の lemma) だから  $\mathcal{M}(\{D_m \cap O\})$  で考えて  $x \notin \text{hull}(S_i)$ .  $x \in \hat{Z}^{-1}(O)$  だから  $\mathcal{M}(\{D_m\})$  で考えても  $x \notin \text{hull}(S_i)$ . よって  $\mathcal{M}(\{D_m\})$  で  $\bar{S}_i = \text{hull}(S_i)$ . (3) により  $\bar{S} = \text{hull}(S)$ .

(5)  $H^\infty(\{D_m\})|_S$  が  $\ell^\infty$  の中等元をすべて含むこと.

projection  $\varphi: H^\infty(\{D_m\}) \longrightarrow H^\infty(\{D_m\})/I_S$  の引き起す写像

$$\Phi: \mathcal{M}(H^\infty(\{D_m\})/I_S) \longrightarrow \mathcal{M}(\{D_m\}), \quad \Phi(x)(f) = x(\varphi(f))$$

は  $\text{hull}(S)$  ( $= \bar{S}$ ) の上への同相写像となる.  $S' = S_1 \cup S_2$ ,

$S_1 \cap S_2 = \emptyset$  とすると  $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = \bar{S}$ ,  $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \emptyset$  ((1)) だから

Silov の中等元定理により

$$\exists f \in H^\infty(\{D_m\})/I_S \quad \text{s.t.} \quad \hat{f} = 0 \text{ on } \Phi^{-1}(\bar{S}_1), \quad \hat{f} = 1 \text{ on } \Phi^{-1}(\bar{S}_2).$$

(6)  $H^\infty(\{D_m\})|_S$  が  $\ell^\infty$  の元をすべて含むこと.

(5) と定理 3 により ( $H^\infty(\{D_m\})/I_S$  のノルムで考えて), (5) の



$f$  はすべて  $\|f\| \leq M$  をみたすようにとれる. 適当に複素数  $C_1, \dots, C_\ell$  ( $|C_i| \leq 1$  ( $i=1, \dots, \ell$ )) をとり

$$x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1 \Rightarrow \exists C_i \text{ s.t. } |x - C_i| \leq \frac{1}{2}$$

と出来るから, (5) の  $f$  の線形結合を考えるとにより,

$$\forall \{a_j\} \in \ell^\infty, \exists g_1 \in H^\infty(\{D_n\}) \text{ s.t. } \|g_1\|_\infty \leq M\ell \|\{a_j\}\|_\infty,$$

$$\|\{a_j - g_1(z_j)\}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\{a_j\}\|_\infty.$$

さらに  $\{a_j - g_1(z_j)\} \in \ell^\infty$  に対して同様に  $g_2 \in H^\infty(\{D_n\})$  をと

っていくことにより  $\{g(z_j)\} = \{a_j\}$  をみたす  $g \in H^\infty(\{D_n\})$

( $\|g\|_\infty \leq 2M\ell \|\{a_j\}\|_\infty$ ) の存在がわかる. [証明終]

#### 4. Main theorem

$\lambda$  を平面領域  $D$  の hyperbolic distance,  $\rho = \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda + 1}$  とする.

$D = \Delta = \{ |z| < 1 \}$  のときは  $\rho$  は pseudo-hyperbolic distance

$$\rho(a, b) = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| \text{ と一致する.}$$

定理4  $D \subset \{ |z| < R (< \infty) \}$ , かつある  $\varepsilon > 0$  があって  $D$  の補集合の任意の成分の直径が  $\varepsilon$  より大であるとする. このとき  $D$  内の点列  $\{z_j\}$  に対して,

$$\{z_j\} : \text{interpolating sequence} \iff \delta = \inf_{\substack{k \\ j \neq k}} \prod_{j=1}^{\infty} \rho(z_j, z_k) > 0$$

さらにこのとき,  $\{z_j\}$  の interpolating constant は  $R, \varepsilon, \delta$  のみに依存する定数で上から押さえられる.  $M$

[証明] ( $\Rightarrow$ )  $\pi: \Delta \rightarrow D$  は universal covering map とする.  $k$  を固定し,  $f \in H^\infty(D)$ ,  $\|f\| \leq M$ ,  $f(z_k) = 1$ ,  $f(z_j) = 0$  ( $j \neq k$ ) とする.  $f \circ \pi \in H^\infty(\Delta)$ ,  $\|f \circ \pi\| \leq M$  である. まず  $a_k \in \pi^{-1}(z_k)$  を適当にとり,  $a_j \in \pi^{-1}(z_j)$  と

$$\lambda_\Delta(a_j, a_k) = \lambda_D(z_j, z_k) \quad \therefore P_D(z_j, z_k) = P_\Delta(a_j, a_k) = \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right|$$

をみたすようにとる.  $\{a_j\}_{j \neq k}$  は zeros とする Blaschke 積を  $B$  とすると,  $f \circ \pi = Bg$ ,  $\|g\|_\infty \leq M$  と表せ,

$$1 = |f \circ \pi(a_k)| = |B(a_k)| |g(a_k)| \leq M |B(a_k)|$$

$$\therefore \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} P_D(z_j, z_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right| = |B(a_k)| \geq \frac{1}{M} > 0$$

$M$  は  $k$  によらないので  $\inf_k \frac{1}{M}$  をと,  $\epsilon$  も正である.

( $\Leftarrow$ )  $\forall x \in D$  に対し  $\epsilon$  の近傍  $U = \{z: |z-x| < \frac{\epsilon}{2}\}$  とすると  $D \cap U$  の各成分は単連結, また一般に  $D' \subset D$  のとき  $\lambda_{D'} \geq \lambda_D$   $\therefore P_{D'} \geq P_D$  故にこの各成分に単位円の場合の結果 (interpolating constant の評価も含めて) を用いることにより,

$\{z_j\} \cap U$  が  $H^\infty(D \cap U)$ -interpolating seq. であることがわかる.

よって定理 1 により  $\{z_j\}$  は  $H^\infty(D)$ -interpolating sequence である.

さらに ... の部分も同様で, もし同じ  $R, \epsilon, \delta$  に対して

interpolating constants  $M_n \rightarrow \infty$  とするような領域列  $\{D_n\}$  と

$\{z_{n,j}\}_j \subset D_n$  があれば,  $\{z_{n,j}\}_{n,j}$  は  $H^\infty(\{D_n\})$ -interpolating

sequence でないことになり, 定理 1' を使えば上と同様にし

て interpolating seq. であることがわかるので, これは矛盾である.  
[証明終]

注意 定理4の  $\Rightarrow$  は領域の形によらずいつでも言えたが,  
 $\Leftarrow$  の言えない平面領域は存在する.

$\Delta_j = \{z : |z - c_j| < r_j\}$ ,  $c_j \in \mathbb{R}^+$  ( $j=1,2,\dots$ )  $\in \Delta \setminus \{0\}$  に含まれ互いに disjoint, かつ  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{c_j} < \infty$  と仮定するようにとり,  
 $D = \Delta \setminus \overline{\bigcup \Delta_j}$  とする. このとき  $\forall f \in H^\infty(D)$  に対して ([9]),

$$\lim_{\mathbb{R}^- \ni x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z} dz.$$

よ,  $\mathbb{R}^-$  上から 0 に近づく点列  $\{z_j\}$  は interpolating seq. に  
はたし得たが, 十分早く  $z_j \rightarrow 0$  とすることにより

$\delta = \inf_k \prod P(z_j, z_k) > 0$  とすることは出来る.

### 参考文献

- [1] W. Bade and P. Curtis, Jr, The wedderburn decomposition of commutative Banach algebras, Amer. Jour. Math., 82 (1960), 851-866.
- [2] M. Behrens, Interpolation and Gleason parts in L-domains, Trans. Amer. Math. Soc., 286 (1984), 203-225.

- [3] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. Jour. Math.*, 80 (1958), 921-930.
- [4] S. Fischer, *Function theory on planar domains*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [5] T. Gamelin, Localization of the corona problem, *Pacific J. Math.*, 34 (1970), 73-81.
- [6] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [7] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [8] T. Narita, A remark on the corona problem for plane domains, *J. Math. Kyoto Univ.*, 25 (1985), 293-298.
- [9] L. Zalcman, Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144 (1969), 241-270.